Prof. Dr. Peter Mürner
Universität Bern 10.4.02

Publikation in der Zeitschrift "Schulpraxis" (August 1999)
(siehe auch www.siderato.ch)

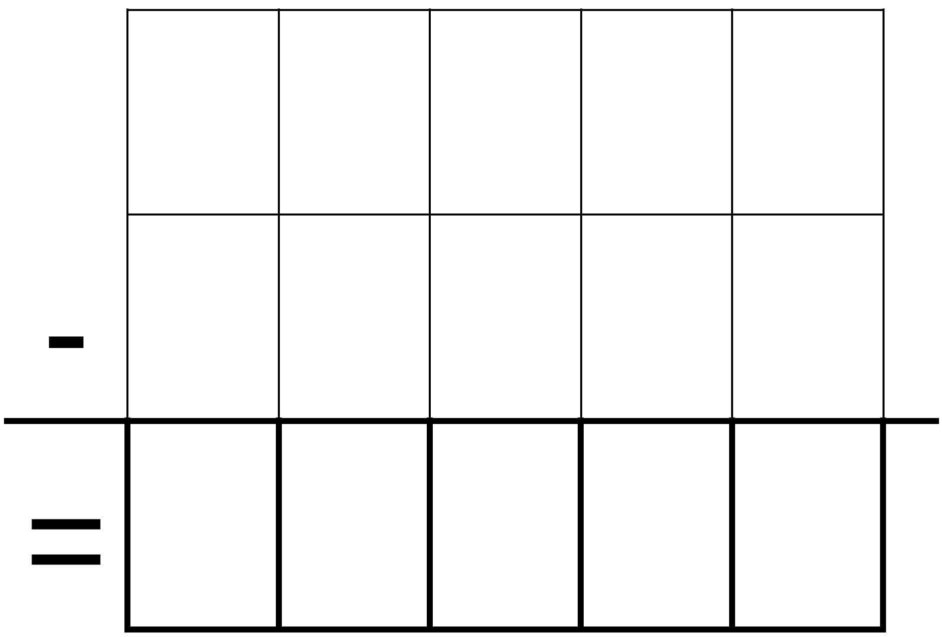
Mathematik + Magie = Mathemagie

Peter Mürner, Dozent für Fachdidaktik Mathematik an der Universität Bern
alias Siderato, Zauberkünstler

Mathematik wird von vielen Menschen als "magisch", als etwas Undurchschaubares und Unerklärliches betrachtet. Umgekehrt hat die Magie (die Zauberkunst) auf den ersten Blick wenig mit Mathematik zu tun. Trotzdem gibt es Zauberkunststücke, die auf mathematischen, vor allem auf arithmetischen, geometrischen und topologischen Gesetzmässigkeiten beruhen. Für diese Sparte der Zauberkunst hat sich der Name "Mathemagie" eingebürgert. Es ist nicht bekannt, wann diese Bezeichnung erstmals in der Literatur verwendet worden ist. Sicher ist, dass sie einerseits in der Monographie "The Tarbell course in magic" (1926) noch fehlt, und dass andererseits im Jahre 1956 Martin Gardner ein Buch "Mathematics, Magic and Mystery" publizierte, das in der deutschen Übersetzung mit "Mathemagische Tricks" betitelt ist. Seither wurden immer wieder neue mathemagische Kunststücke erfunden, vor allem von Zauberkünstlern, die auch mathematisch interessiert sind.
Für die Schulpraxis sehe ich die Anwendung der Mathemagie im Rahmen der unterhaltenden Mathematik, bei der mathematische Gesetzmässigkeiten in eine ansprechende Form "eingekleidet" werden können. Die nachstehenden Beispiele zeigen vor allem mathematisch interessante Sachverhalte auf, beschränken sich bei der magischen Umsetzung aber lediglich auf einige Hinweise. Damit soll einerseits der individuellen Kreativität freier Lauf gelassen und andererseits den "Standesregeln" der Zauberkünstler Respekt gezollt wird.

Zahlenakrobatik mit der Zahl 9

Einige mathemagische Zauberkunststücke nutzen die besonderen Eigenschaften der Zahl 9 aus. Dreht man beispielsweise eine dreiziffrige Zahl um (die erste und die letzte Ziffer dürfen nicht gleich sein) und subtrahiert die kleinere von der grösseren, so ist die mittlere Ziffer des Ergebnisses immer 9 und die Summe der beiden äusseren Ziffern ist ebenfalls 9. Dies bedeutet, dass man, sobald man die erste oder letzte Ziffer der Lösung kennt, sofort die ganze Zahl sagen kann.
Beim anschliessend beschriebenen Zauberkunststück spielt die Quersumme 9 eine zentrale Rolle. Der Zauberkünstler übergibt einem Mitspieler (Zuschauer) eine Karte (beispielsweise Format A6), auf der ein Schema gemäss Figur 1 aufgezeichnet ist. Nun lässt man den Mitspieler in der obersten Zeile eine fünfstellige Zahl hinschreiben. Anschliessend fordert man ihn auf, mit den gleichen Ziffern, die in der ersten Zeile verwendet wurden, in der zweiten Zeile ebenfalls eine Zahl aufzuschreiben, deren Wert aber kleiner sein soll als der Wert der Zahl in der obersten Zeile. Dann wird der Mitspieler gebeten, die zweite Zahl von der ersten Zahl zu subtrahieren und das Ergebnis in der untersten Zeile festzuhalten. Von den so entstehenden fünf Ziffern in der untersten Zeile soll eine Ziffer ausgewählt und eingekreist werden. Wenn nun der Mitspieler die nicht eingekreisten vier Ziffern in der letzten Zeile dem Zauberkünstler nennt, ist dieser in der Lage, die eingekreiste Ziffer anzugeben.
Erklärung: Die Quersumme der untersten Zeile beträgt stets 9.
Frage: Wie kann der Zauberkünstler zwischen einer eingekreisten 9 und einer eingekreisten 0 unterscheiden?



Figur 1

Ad infinitum

Dieses Kunststück wurde 1974 erstmals vom englischen Mentalisten David Berglas publiziert und von Peter Wilker, ehemals Mathematikprofessor an der Universität Bern, ausgefeilt und verbreitet.
Der Zauberkünstler lässt sich von drei Zuschauern (Mitspielern) je eine dreistellige Zahl zurufen, die er untereinander schreibt, etwa

728
536
410

Er macht hierauf eine Voraussage in Form einer Zahl, die er den Zuschauern aber noch nicht zeigt. Nun lässt der Zauberkünstler drei neue Zahlen wie folgt bestimmen: Die Zuschauer wählen eine Ziffer der ersten, eine der zweiten und eine der dritten Reihe beliebig aus und bilden daraus eine neue Zahl, zum Beispiel 761. Dies wird wiederholt und ergibt etwa 230. Es bleibt als dritte Zahl automatisch 854 (in unserem Beispiel). Diese drei Zahlen werden zusammengezählt mit dem Ergebnis 1845. Dies ist genau die Zahl, die der Zauberkünstler als Voraussage (vor der freien Bestimmung der drei Zahlen 761, 230 und 854 durch die Zuschauer) hingeschrieben hatte!
Mathematische Kurzerklärung: Man denke sich das Tableau der ursprünglich zugerufenen Zahlen im Gegenuhrzeigersinn um 90 Grad gedreht, was

860
231
754

ergibt. Die Summe dieser drei Zahlen ist die Vorhersage und sie wird trotz beliebiger Wahl durch die Zuschauer stets resultieren. Erstaunlich, gibt es doch immerhin 36 verschiedene Möglichkeiten!

Fibonacci-Reihe

Hier handelt es sich um ein mathemagisches Kunststück im Schnellrechnen. In Sekundenschnelle werden vom Zauberkünstler 10 Zahlen einer Fibonacci-Reihe addiert.
Pro memoria: Bei einer Fibonacci-Folge entsteht jedes Glied der Folge aus der Summe der zwei vorangehenden Folgenglieder: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Als Auftakt zur Vorführung des nachfolgend beschriebenen Zauberkunststücks, das eben auf der Fibonacci-Folge basiert, bittet Siderato einen Zuschauer, zwei beliebige natürliche Zahlen kleiner als 10 niederzuschreiben. Nehmen wir zum Beispiel an, er wähle 8 und 5. Die beiden Zahlen schreibt er untereinander und wird dann aufgefordert, sie zu addieren und das Ergebnis als dritte Zahl unter die beiden ersten Zahlen zu schreiben. Die dritte Zahl wird zur darüberstehenden addiert, um so eine vierte Zahl zu erhalten. Dies wird fortgesetzt, bis man eine Spalte von 10 Zahlen hat:

8
5
13
18
31
49
80
129
209
338

Während der Zuschauer diese Zahlen aufschreibt, dreht ihm der Zauberkünstler den Rücken zu. Nachdem alle zehn Zahlen niedergeschrieben sind, dreht er sich kurz um, zieht eine Linie unter die Kolonne, wendet sich wieder ab und schreibt eine Voraussage auf. Dann bittet er den Zuschauer, die Summe aller zehn Zahlen zu bilden. Die Summe stimmt mit der Voraussage des Zauberkünstlers, die er in Sekundenschnelle notiert hatte, überein!
Mathematische Erklärung: Die Summe lässt sich aus der vierten Zahl von unten berechnen, indem man sie mit 11 multipliziert, was sich leicht im Kopf durchführen lässt. In unserem Beispiel ist die vierte Zahl von unten 80, deshalb ist die Lösung 880.

Anregung: Das Kunststück kann auch als Wettbewerb im Schnellrechnen durchgeführt werden.

Magische Quadrate

Ordnet man die neun Ziffern 1 bis 9 in der natürlichen Reihenfolge in ein Quadrat ein (Figur 2), so entstehen auffällige Summierungseigenschaften (beispielsweise konstante Diagonalensumme 15).

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

Figur 2

Wenn man nun auf dieses Zahlenquadrat die nachstehenden Anweisungen in Goethes Faust befolgt, so werden zusätzlich auch die Zeilensummen konstant mit dem Wert 15:

"Aus 1 mach 10, und 2 lass gehen,
und 3 mach gleich, so bist Du reich!
Verlier die 4! Aus 5 und 6,
so spricht die Hex, mach 7 und 8,
so ist's vollbracht!"

10	**2**	**3**
0	**7**	**8**
5	**6**	**4**

Figur 3

Das so entstandene Quadrat ist indessen noch nicht magisch im ursprünglichen Sinn des Worts: Nicht nur fehlen die Zahlen 1und 4, sondern auch die 0 und die 10 stören. Ausserdem ergibt die eine Diagonalensumme nicht 15. Dieser Umstand hat den Zauberkünstler Reinhard Tröstler alias Perkeo zu folgender Überarbeitung des in Figur 2 dargestellten Quadrats "frei nach Goethe" veranlasst:

"Aus 1 mach 2, und 4 aus 3,
durch Hexerei zur 9 wird 2.
Und jetzt zur 4 die 3 addier!
Doch 5 lass gleich, so wirst Du reich!
Halbier die 6, so spricht die Hex.
Nimm 1 von 7, so wird man Dich lieben.

Und 7 von 8; gleich ist's vollbracht:
Zieh ab nur noch 1 von 9, so fehlt keins.
Hast befolgt Du den Rat, gibt's ein "magisch Quadrat"."

2	**9**	**4**
7	**5**	**3**
6	**1**	**8**

Figur 4

Magische Quadrate der Ordnung 4 (d.h. 4 x 4 Felder) bieten bekanntlich noch mehr Summierungsmöglichkeiten als nur die Zeilen, Spalten und Diagonalen. Sie werden deshalb hie und da auch als Basis für Zauberkunststücke benutzt. Der Zauberkünstler kann beispielsweise ein 4 x 4-Schema gemäss Figur 5 präsentieren und einen Zuschauer nach einer Zahl zwischen 34 und 100 fragen.

Figur 5

Nehmen wir an, er nennt 56. Sofort kann der Zauberkünstler die 16 Quadratfelder so ausfüllen, dass als "magische Zahl" 56 resultiert:

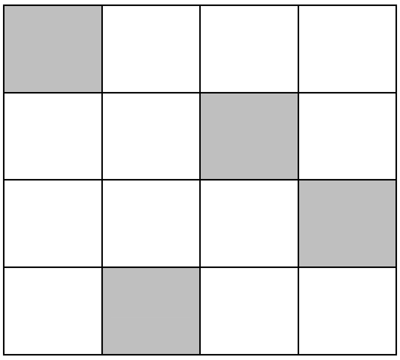
23	8	7	18
10	15	18	13
14	11	12	19
9	22	19	6

Figur 6

Folgende Summen ergeben jeweils 56:

- 4 Zeilen
- 4 Spalten
- 2 Diagonalen
- Summe der 4 Eckfelder (23 + 18 + 6 + 9)
- 4 Eckquadrate (z.B. 23 + 8 + 10 + 15)
- 1 Mittenquadrat (15 + 18 + 12 + 11)
- 2 Halbdiagonalen (10 + 8 + 19 +19; 7 + 13 + 14 + 22)
- 4 Randpaare (8 + 7 + 22 + 19; 10 + 14 + 13 + 19; 23 + 8 + 19 + 6; 7 + 18 + 9 + 22)
- 2 Mittenpaare (10 + 15 + 12 + 19; 14 + 11 + 18 + 13)

Die besondere Schnelligkeit, mit der der Zauberkünstler die 16 Felder ausgefüllt hat, sorgt für mathemagische Verblüffung bei den Zuschauern! Die Lösung liegt darin, dass das magische Quadrat der Ordnung 4 die Summe 34 aufweist. Wird nun vom Zuschauer eine Zahl grösser als 34 genannt, muss man von ihr zuerst 34 abziehen (im obigen Beispiel also 56 - 34 = 22). Um diese Zahl 22 muss nun jede Summe (Zeile usw.) erhöht werden, d.h. 22 wird durch 4 dividiert: 5 (Rest 2). Jedes Feld muss also um 5 erhöht und jede Summe (Zeile, Spalte, usw.) noch um den Rest 2 vermehrt werden. Das geschieht in den Feldern, die in Figur 7 schraffiert sind.



Figur 7

Für mathematisch besonders Interessierte seien hier noch 4 Quadrate zitiert, die Stephen J. Ruberg, Miami University, 1979 im Mathematics Magazine publiziert hat. Für die magische Konstante N kann modulo 4 folgende Fallunterscheidung betrachtet werden:

n-8	**n+7**	**n+6**	**n-5**
n+4	**n-3**	**n-2**	**n+1**
n-1	**n+2**	**n+3**	**n-4**
n+5	**n-6**	**n-7**	**n+8**

N = 4n

n-8	**n+8**	**n+6**	**n-5**
n+4	**n-3**	**n-1**	**n+1**
n	**n+2**	**n+3**	**n-4**
n+5	**n-6**	**n-7**	**n+9**

N = 4n + 1

n-7	**n+7**	**n+6**	**n-4**
n+4	**n-2**	**n-1**	**n+1**
n	**n+2**	**n+3**	**n-3**
n+5	**n-5**	**n-6**	**n+8**

N = 4n + 2

n-8	**n+8**	**n+7**	**n-4**
n+5	**n-2**	**n-1**	**n+1**
n	**n+2**	**n+4**	**n-3**
n+6	**n-5**	**n-7**	**n+9**

N = 4n + 1

Nach diesem mathematisch etwas anspruchsvolleren Exkurs folgt ein einfacheres mathemagisches Zahlenspiel, das aber erfahrungsgemäss auch immer wieder zur Verblüffung der Zuschauer bei einer Zaubervorführung beiträgt.

Magisches Zahlenspiel

Der Zauberkünstler bittet einen Mitspieler, sich eine Zahl zwischen 1 und 63 zu merken. Dann zeigt er dem Mitspieler die sechs in Figur 4 abgebildeten Karten der Reihe nach und bittet ihn, mit "Ja" oder "Nein" anzugeben, ob sich seine gemerkte Zahl auf der jeweiligen Karte befindet. Unmittelbar anschliessend kann der Zauberkünstler die vom Zuschauer gemerkte Zahl nennen.
Lösung: Von allen "Ja"-Karten wird fortlaufend die erste Zahl oben links addiert. Die so errechnete Zahl ist die gemerkte Zahl des Mitspielers.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Wo ist die Karte?

Viele Kartenkunststücke basieren ebenfalls auf mathematischen Prinzipien. Für das erste Beispiel, das hier präsentiert werden soll, benötigen wir aus einem Jassspiel beliebige 21 Karten. Diese Karten werden dem Zuschauer vom Zauberkünstler aufgefächert vorgezeigt, damit sich dieser eine der 21 Karten merken kann.
Nun werden die Karten gemischt und mit der Bildseite nach oben auf dem Tisch in drei Stapel aufgeteilt: Zuerst werden drei Karten nebeneinander hingelegt, anschliessend drei Karten darauf verteilt usw., bis auf jedem Stapel sieben Karten liegen. Nun wird der Zuschauer gefragt, in welchem Stapel sich die von ihm gemerkte Karte befindet. Anschliessend werden die drei Stapel so zusammengelegt, dass der Stapel, in dem sich die vom Zuschauer gemerkte Karte befindet, in die Mitte kommt.
Nun wird dieser Vorgang noch zweimal wiederholt. Jetzt ist der Zauberkünstler in der Lage, die vom Zuschauer am Anfang gemerkte Karte zu nennen: Sie befindet sich nämlich an der 11. Stelle im Spiel! Weshalb?

Wette um sechs Fünfliber

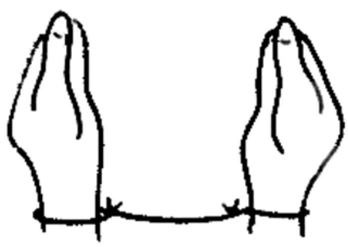
Aus einem Jassspiel werden sieben beliebige Karten gewählt. Der Zauberkünstler setzt sechs Fünfliber als Einsatz für eine Wette mit einem Zuschauer.
Nun wählt der Zuschauer eine der sieben Karten frei aus (X) und nennt eine Zahl zwischen 1 und 7 (Y). Während der Zuschauer die Zahl Y nennt, legt der Zauberkünstler die Karte X beiläufig unter die anderen sechs Karten. Nun werden die (Rükken gegen oben, in der linken Hand gehaltenen) Karten einzeln von oben abgezählt und unter den Stapel gelegt. Die Y-te Karte wird vom Zauberkünstler in die rechte Hand genommen. Falls diese Karte die vom Zuschauer gewählte ist, erhält er alle sechs Fünfliber. Andernfalls wird ein Fünfliber weggenommen. Natürlich(!) ist die umgedrehte Karte nicht identisch mit der vom Zuschauer gewählten. Die umgedrehte Karte wird nun mit dem Bild nach oben unter den Stapel gelegt, und der Abzählvorgang wird von vorne begonnen.
Es wird die geneigten (und in der Zauberkunst bewanderten) Leserinnen und Leser kaum überraschen, dass die vom Zuschauer gewählte Karte X erst ganz am Schluss umgedreht wird und deshalb alle sechs Fünfliber wieder zum Zauberkünstler "zurückgewandert "sind.

Rot und schwarz

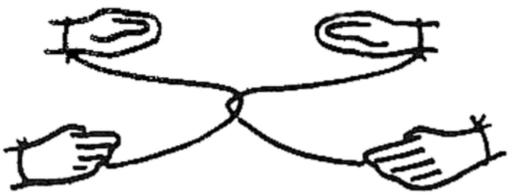
Bei verschiedenen Kartenkunststücken wird jene Eigenschaft von Jasskarten ausgenützt, dass sich ein Spiel in rote und schwarze Karten aufteilen lässt. Der nachstehende Effekt ist vom spanischen Zauberkünstler Juan Tamariz entwickelt worden und ist sehr leicht vorzuführen. Es geht darum, dass ein Zauberkünstler zwei von den Zuschauern gewählte Karten auf scheinbar unmögliche Art und Weise erraten kann.
Das Jassspiel wird so vorbereitet, dass die roten und schwarzen Karten abwechslungsweise liegen. Dann wird das Spiel auf den Tisch gelegt und von einem Zuschauer abgehoben. Die nun zuoberst liegende Karte wird von einem weiteren Zuschauer (A) genommen und eingeprägt; das gleiche geschieht mit der zweitobersten Karte und einem zweiten Zuschauer (B). Nachdem sich die beiden Zuschauer die Karten eingeprägt haben, legt der Zuschauer A seine Karte wiederum auf das Spiel zurück, anschliessend der Zuschauer B (damit ist auf völlig unbemerkte Weise die Reihenfolge der beiden obersten Karten vertauscht worden!).
Nun werden die Karten abwechslungsweise auf zwei Stapel aufgeteilt und die beiden Stapel gemischt. Aus Sicht der Zuschauer ist es unmöglich, dass der Zauberkünstler die beiden anfangs gewählten Karten nennen kann. Beim Durchblättern wird er indessen aus lauter roten oder aus lauter schwarzen Karten ohne weiteres die einzige "fremde" Karte bestimmen können: Es sind die beiden zuvor gewählten Karten!

Topologischer Schnurtrick

Besonders faszinierend sind mathemagische Zauberkunststücke, die auf topologischen Eigenschaften basieren. Ein einfaches Beispiel dafür ist ein Schnurtrick, bei dem die Handgelenke wie in Figur 5 mit einem Stück Schnur verbunden werden. Falls man zwei Personen auf diese Weise miteinander verbindet, wobei die Schnüre so wie in Figur 6 dargestellt verkettet sind, kann die Schnur so manipuliert werden, dass sich das Paar trennen kann, ohne die Schnur zu zerschneiden. Es ist ein unterhaltsames Spiel, beispielsweise in einer Schulklasse je zwei Personen wie in Figur 6 dargestellt miteinander zu verbinden und dem ersten Paar, das sich voneinander trennen kann, einen Preis anzubieten. Die Paare werden bei ihren Versuchen, sich zu befreien, die lustigsten Verrenkungen ausführen.
Die Lösung zu diesem Problem beruht auf der Tatsache, dass die Verbindungslinie aus Schnur, Armen und Körper keine echte geschlossene Kurve ist. Sie kann nämlich an den Handgelenken getrennt werden. Die zwei Personen werden so getrennt, dass man den mittleren Teil der einen Schnur durch jene Schlinge, die das Handgelenk der anderen Person umgibt zieht, dann weiter über deren Hand und wieder durch diese Schlinge zurückzieht.



Figur 8



Figur 9

Unmöglicher Knoten

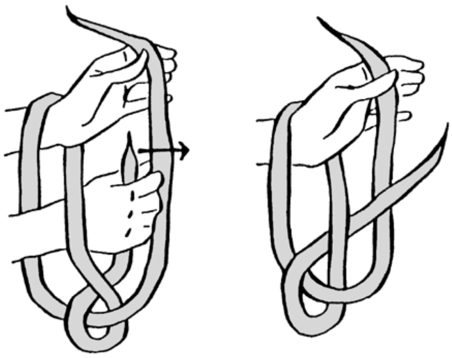
Die einfachste Variante dieses Kunststücks besteht darin, dass man einem Zuschauer ein Seilstück von etwa 50 cm Länge gibt und ihn bittet, damit einen Knoten zu bilden ohne die Schnurenden loszulassen. Dieses Problem ist bekanntlich dadurch lösbar, dass man die Arme verschränkt, bevor man die Seilenden fasst. Wenn dann die Arme "entwirrt" werden, bildet sich in der Schnur automatisch ein Knoten.

Etwas anspruchsvoller ist das folgende topologische Kunststück, bei dem die erläuternden Skizzen dem Buch " Encyclopedia of Silk Magic " von H. Rice entnommen sind.

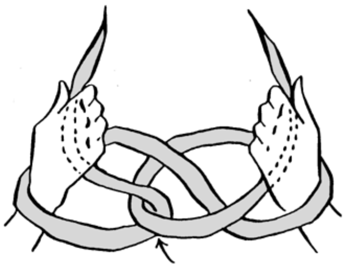
- Das Seil wird gemäss Figur 10 in beiden Händen gehalten
- Mit dem rechten Ende wird eine Schlinge über dem linken Arm gebildet (Figur 11)
- Ohne die Seilenden loszulassen, wird das rechte Ende durch die Schlinge bei der linken Hand geführt (Figur 12)
- Wenn nun die beiden Hände gegen unten gedreht werden, fallen die beiden Schlingen über die Handgelenke, ohne dass ein Knoten entsteht (Figur 13)
- Wenn beim Fallenlassen der Schlingen über die beiden Handgelenke (unbemerkt) die Finger der rechten Hand das Seil an der Stelle X (Figur 14) ergreifen, wird im Seil ein Knoten entstehen (Figur 15)!

Figur 10

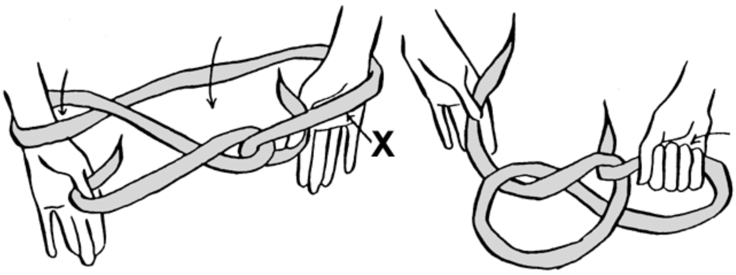
Figur 11



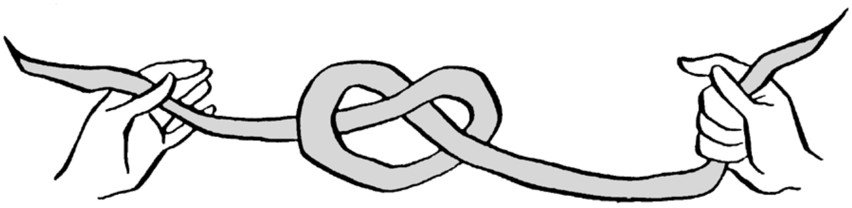
Figur 12



Figur 13



Figur 14



Figur 15

Afghanische Bänder

Das in der Mathematik bekannte "Möbiusband" wurde schon 1882 in einem Zauberbuch erwähnt. In jener Version übergibt der Zauberkünstler einem Zuschauer drei grosse "Ringe" aus Papier, die man jeweils durch Zusammenkleben der beiden Enden eines langen Papierstreifens erhält. Mit einer Schere schneidet der Zuschauer den ersten Streifen der Länge nach in zwei Hälften, wobei er entlang der Bandmitte schneidet, bis er zum Ausgangspunkt zurückkommt. Nach dem Schneiden hat er zwei Ringe aus Papier in den Händen. Wird jedoch der zweite Ring auf ähnliche Art und Weise in zwei Teile geschnitten, stellt der Zuschauer zu seiner Überraschung fest, dass er nur ein einziges Band erhält, dessen Umfang zweimal so gross wie der des ursprünglichen Bandes ist. Beim dritten Band ist das Ergebnis ebenso erstaunlich: Zwei Papierringe, die miteinander verkettet sind.
Das Ergebnis beruht bei den einzelnen Bändern selbstverständlich auf ihrer speziellen Vorbereitung. Beim ersten Streifen werden die Enden miteinander verbunden, ohne dass er gedreht wird. Das zweite Band ist eine Möbiusfläche, die man erhält, indem man das eine Ende des Streifens einmal dreht, bevor man es mit dem anderen Ende zusammenklebt. Es ist eine der vielen eigenartigen Eigenschaften dieser Fläche, die nur eine Seite und eine Kante hat, dass man sie der Länge nach zu einem einzigen grossen Ring zerschneiden kann. Das dritte Band wurde zweimal gedreht, bevor man seine Enden zusammenklebte.
Schliesslich sei darauf hingewiesen, dass Siderato dieses Kunststück als Wettbewerb vorführt. Es werden zwei Personen aus dem Publikum auf die Bühne gebeten, und jede Person bekommt ein Band und eine Schere. Siderato zeigt zunächst mit seinem Papierband vor, was zu tun ist: Das Band soll in zwei getrennte Ringe zerschnitten werden. Nach dem Start des Wettbewerbs beginnen die beiden Mitspieler zu schneiden. Sobald sie fertig sind, will der Zauberkünstler dem Gewinner den Preis übergeben, bemerkt aber, dass es keinem gelungen ist, die Forderung zu erfüllen. Entweder ist ein einzelner grosser Ring entstanden oder zwei miteinander verkettete Ringe.
Der Ausdruck "Afghanische Bänder" wurde für dieses Zauberkunststück bereits im Jahre 1904 verwendet, als Prof. Hofmann diesen Trick in "Later Magic" so bezeichnete. Warum dieser Name für den Trick gewählt wurde, bleibt ein Geheimnis.